Lezione 19

$M \dashrightarrow H^*(M)$

- funtorialità
- invarianza per omotopia
- Mayer-Vietoris
- Dualità di Poincaré $\quad H^*_c(M)$
- Formula di Künneth

$\mathbb{R}^n, S^n, \mathbb{CP}^n$

$H^*(S^1 \times S^1) = ?$

PRODOTTI DI VARIETÀ

M, N varietà

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\pi_N"] \arrow[d, "\pi_M"] & N \\ M & \end{tikzcd}$$

$$\Omega^k(M) \times \Omega^h(N) \longrightarrow \Omega^{k+h}(M \times N) \quad \text{bilineare}$$

$$(\omega, \eta) \longmapsto \pi_M^*\omega \wedge \pi_N^*\eta$$

passa al quoziente $H^k(M) \times H^h(N) \longrightarrow H^{k+h}(M \times N)$

Prendendo tutte queste mappe al variare di k e h e estendendo per bilinearità ottengo

$$\begin{tikzcd} H^*(M) \times H^*(N) \arrow[r] \arrow[dr, "\pi"'] & H^*(M \times N) \\ & H^*(M) \otimes H^*(N) \arrow[u, dotted, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

$$\psi : H^*(M) \otimes H^*(N) \longrightarrow H^*(M \times N)$$

Teo: Se $b^i(N) < +\infty$, allora ψ è isomorfismo

Cor:

$$\psi : \bigoplus_{i=0}^{k} H^i(M) \otimes H^{k-i}(N) \to H^k(M \times N) \text{ isom. } \forall k$$

Cor:

$$\boxed{\sum_{i=0}^{k} b^i(M) \cdot b^{k-i}(N) = b^k(M \times N)}$$

$\underline{\text{dim}}_{\text{Teo}}$: Come per Poincaré:

$$\mathcal{B} = \{ U \subseteq M \text{ t.c. } \mid \text{il teorema è vero per } U \times N \}$$

$\mathcal{B}$ soddisfa a) b) c) $\square$

<u>Cor</u>: $T = S^1 \times S^1$ $\quad b^0 = 1 \quad b^2 = 1 \quad b^1 = 2$

$$b^1(S^1 \times S^1) = b^0(S^1) \cdot b^1(S^1) + b^1(S^1)\, b^0(S^1)$$
$$= 1 + 1 = 2$$

<u>Cor</u> (esercizio): $T = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n}$ $\quad b^k(T) = \binom{n}{k}$

<u>Cor</u>: $M = S^2 \times S^2$ $\quad b^0 = 1 \quad b^4 = 1$

$$b^3 = b^1(S^2 \times S^2) = 2 b^0(S^2) \cdot \underbrace{b^1(S^2)}_{=0} = 0$$

$$b^2 = b^2(S^2\times S^2) = \underbrace{2\cdot b^0(S^2)\cdot b^2(S^2)}_{=2} + \underbrace{b^1(S^2)^2}_{=0}$$

$$b^i(S^n\times S^n) = \begin{cases} 1 & \text{se } i=0,2n \\ 2 & \text{se } i=n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{ll} S^4 & 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ S^2\times S^2 & 1\ 0\ 2\ 0\ 1 \\ \mathbb{CP}^2 & 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \end{array}\right\} \text{non sono omot. eq.}$$

<u>Ex</u>: $\chi(M\times N) = \chi(M)\cdot\chi(N)$

<u>Geometria Riemanniana</u>

M varietà (sempre senza bordo)

Def: Un TENSORE METRICO è un prodotto scalare $g(p)$ su T_pM che varia in modo liscio rispetto a $p \in M$

(cioè $g \in \Gamma S^2(M)$ t.c. $g(p)$ sia prod. scalare)

nondegenere $\forall p$

$\forall p$, $g(p)$ ha SEGNATURA (i_+, i_-)

Ex: Se M è connessa, la segnatura è costante

Def: Una VARIETÀ PSEUDO-RIEMANNIANA è (M, g) dove g è tensore metrico su M.

Se g ha segnatura def + (cioè $i_+ = n$, $i_- = 0$) M è RIEMANNIANA.

Se g ha segnatura $(n-1, 1)$ è LORENTZIANA

Oss: In relatività generale lo spaziotempo è una varietà lorentziana dim $4 = 3+1$ $(3,1)$

TIPI DI VETTORI: (M, g) pseudo-Riemanniana

$v \in T_pM$ è
$v \neq 0$

- $\to$ di tipo TEMPO se $\langle v, v\rangle < 0$
- $\to$ di tipo LUCE se $\langle v, v\rangle = 0$
- $\to$ di tipo SPAZIO se $\langle v, v\rangle > 0$

$g(p)(v,w) = \langle v, w\rangle$
$v, w \in T_pM$

La lunghezza (norma) di v è $\sqrt{|\langle v, v\rangle|} = \|v\|$

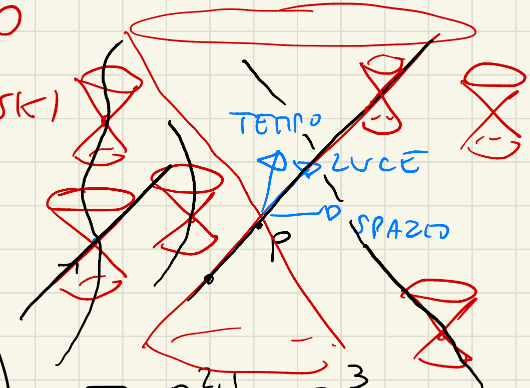
$\|v\| = 0 \iff v = 0 \lor v$ è luce

Es: $\mathbb{R}^{p,q} = \mathbb{R}^n$ dotato di $g(x) = \begin{pmatrix} -I^q & 0 \\ 0 & I^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$

è varietà pseudo-Riemanniana di segnatura (p,q)

$\mathbb{R}^{n,0} = \mathbb{R}^n$ è lo SPAZIO EUCLIDEO

$\mathbb{R}^{3,1}$ è lo SPAZIO DI MINKOWSKI



$$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_p \mathbb{R}^{p,q} = \mathbb{R}^n$$

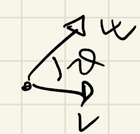
$\mathbb{R}^{2,1}$

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad T_p \mathbb{R}^{2,1} = \mathbb{R}^3$$

Def: Un arco α in M pseudo-Riem. è di tipo spazio/tempo/luce se $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)} M$ è " " " " " $\forall t$

Se M è Riemanniana, $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ usuale

Sono ben definiti gli angoli fra vettori non nulli:



$$\vartheta = \arccos \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \, \|w\|}$$

Modifiche conformi

(M, g) pseudo-Riemanniana. $\lambda \neq 0$ $\lambda \in \mathbb{R}$

$\downarrow$ RISCALAMENTO (la geometria cambia poco: stesse geod.
stessi angoli, ma lunghezze che
volumi
cambiano in modo controllato)

$(M, \lambda g)$

Se $\lambda < 0$ la segnatura cambia da (p,q) a (q,p)

Più in generale, posso prendere $\lambda : M \to \mathbb{R}$ mai nulla
LISCIA

$(M,g) \dashrightarrow (M, \lambda g)$ $\quad (\lambda g)(p) = \lambda(p)\, g(p)$

MODIFICA CONFORME

Prop: M con tensori metici g, g' def+ danno gli stessi angoli ovunque $\iff$ $g' = \lambda g$ per una $\lambda : M \to (0, +\infty)$ LISCIA dim: $\boxed{\Leftarrow}$ OK

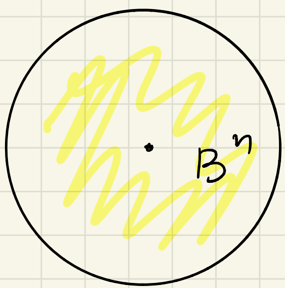
$\boxed{\Rightarrow}$ Es: S, S' simm. $n \times n$ def+ che danno gli stessi angoli $\Rightarrow$ $S = \lambda S'$ $\Rightarrow$ $\lambda = \dfrac{\|v\|_S}{\|v\|_{S'}}$ è liscio in $p \in M$

Def: Il MODELLO DEL DISCO DELLO SPAZIO IPERBOLICO è

$M = B^n \subseteq \mathbb{R}^n$ $\qquad g = \lambda \cdot g_E$ $\quad$ λ è una certa funzione

$$\boxed{g(x) = \left(\frac{2}{1-\|x\|_E^2}\right)^2 \cdot I^n}$$

n=2:



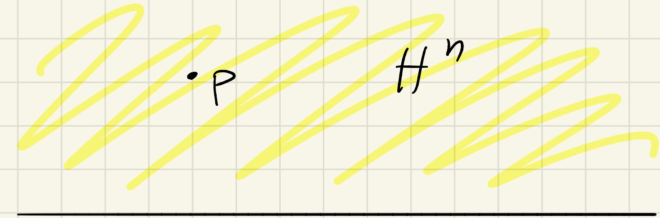
$B^2 \subseteq \mathbb{R}^2$

$g(p)$ matrice 2×2 simm. che dip da p

$T_p B^2 = \mathbb{R}^2$

Il MODELLO DEL SEMISPAZIO DELLO SPAZIO IPERBOLICO è

$$M = \mathbb{R}^n_{>0} = \{ x_n > 0 \}$$



$$\boxed{g(x) = \frac{1}{x_n^2} g^E}$$

Sono entrambi modelli CONFORMI
(gli angoli sono quelli Euclidei, le lunghezze no)

<u>Def</u>: Una ISOMETRIA fra varietà pseudo-Riemanniane è un diffeo $f: \underset{g}{M} \to \underset{h}{N}$ t.c.

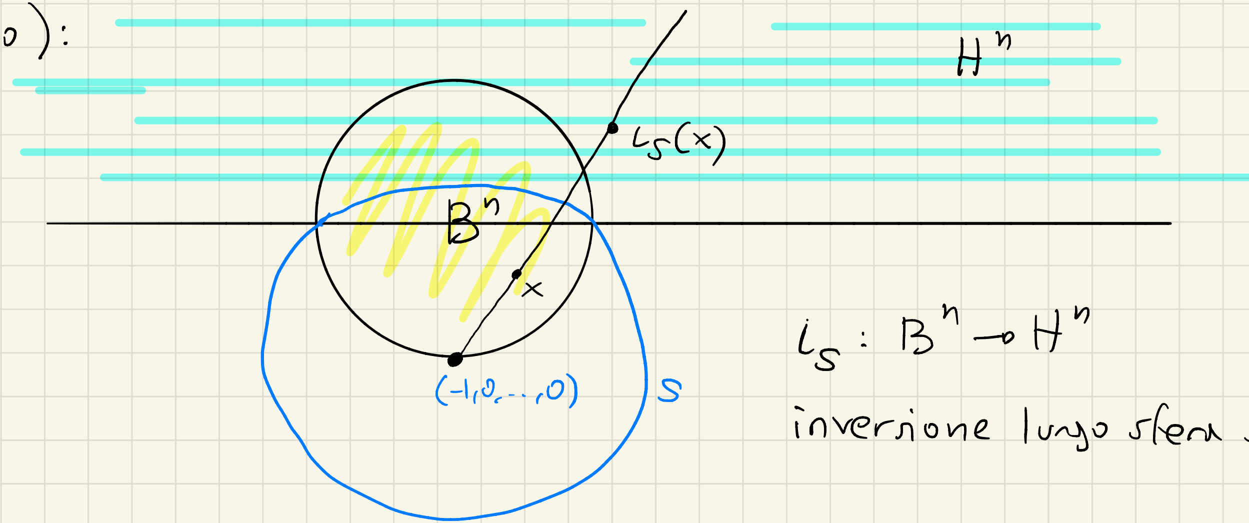
$$df_p : T_pM \to T_{f(p)}N \text{ sia una isometria}$$

cioè

$$\underbrace{\langle v, w \rangle}_{g(p)(v,w)} = \underbrace{\langle df_p(v), df_p(w) \rangle}_{h(f(p))(df_p(v), df_p(w))}$$

Equivalente a dire che $f^*h = g$

Ex (noioso):



$i_S : B^n \to H^n$

inversione lungo sfera S

Esempi di isometrie:

$\mathbb{R}^n$ $\qquad \underbrace{f(x) = Ax + b}_{\text{isometria di } \mathbb{R}^n} \qquad A \in O(n) \qquad b \in \mathbb{R}^n$

infatti $df_x = A \in O(n)$

$\mathbb{R}^{p,q}$ $\qquad O(p,q) \subseteq GL(n,\mathbb{R}) \qquad n = p+q$

$$\begin{aligned} &\ \| \\ &\{ A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid {}^tA\, I^{p,q} A = I^{p,q} \} \end{aligned} \qquad I^{p,q} = \begin{pmatrix} -I^q & \\ & I^p \end{pmatrix}$$

$f(x) = Ax + b \quad A \in O(p,q)$ è isometria di $\mathbb{R}^{p,q}$

$H^n \qquad g(x) = \frac{1}{x_n^2} I^n \qquad f(x) = x + b \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$ è isometria

$D^n \qquad g(x) = \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right)^2 I^n \qquad f(x) = Ax \qquad A \in O(n)$

è isometria

$g(x) = \lambda(\|x\|) \, I^n \Rightarrow$